



Samedi 8 avril 2023

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP- MPI - PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2023

Option Mathématiques

Pour tout nombre entier $N \geq 2$, on désigne par $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre N et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et par I_N la matrice-identité d'ordre N . La topologie de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.

L'objet de ce problème est l'étude, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, de la convergence et de la limite éventuelle de la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ associant à tout entier naturel k la matrice M^k .

■ PARTIE I : Exemples de suites géométriques matricielles

1°) Cas où la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$

- Etant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, établir que la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$ si et seulement si M est une matrice de projection.
- En déduire que toute matrice de projection M est limite d'une suite géométrique matricielle.

2°) Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est orthogonale

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *orthogonale* appartenant à $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$.

- Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- On suppose que la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L .

Montrer que L est inversible et, en considérant la suite $(M^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, que $ML = LM = L$.

En déduire les matrices M et L .

- Quelles sont les suites géométriques matricielles $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergentes lorsque $M \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$?

3°) Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est antisymétrique

On note $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ les sous-espaces des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *antisymétrique* appartenant à $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- Etudier, selon la parité de l'entier naturel k , l'appartenance de M^k à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.
- On suppose que la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L . Déterminer L .

4°) Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est symétrique

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *symétrique* appartenant à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

- Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$ et de réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ tels que :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

- En déduire à quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les valeurs propres de M la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente (et on notera alors L sa limite).

Préciser dans ce cas sa limite L sous la forme PDP^{-1} en explicitant D à l'aide de l'entier r égal à l'ordre de multiplicité de 1 si 1 est valeur propre de M , et à 0 si 1 n'est pas valeur propre de M . Indiquer enfin la nature géométrique de L .

5°) Etude de la suite $((\lambda I_N + U)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice U est nilpotente et $|\lambda| < 1$.

Dans cette question, on suppose que U est une matrice nilpotente appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont on note p l'indice de nilpotence (donc $U^{p-1} \neq 0$ et $U^p = 0$) et λ un complexe tel que $|\lambda| < 1$.

a) Montrer, si $\| \cdot \|$ désigne une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, qu'on a :

$$\forall k \geq p, \quad \|(\lambda I_N + U)^k\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \|U^i\|.$$

b) En déduire la limite de la suite matricielle $((\lambda I_N + U)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

■ PARTIE II : Convergence et limite d'une suite géométrique matricielle

6°) Recherche de la limite éventuelle d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice quelconque appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, et que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

a) Examiner la limite de la suite $(M^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $L^2 = L$. Qu'en conclut-on?

b) On considère un vecteur $y \in \text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N)$.

- Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^N$ tels que $y = Mx - x$ et montrer qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k y = M^k x - x.$$

- En déduire, si $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est muni d'une norme $\| \cdot \|$ subordonnée à une norme $\| \cdot \|$ de \mathbb{K}^N , que :

$$k \|y\| \leq \|M^k\| \|x\| + \|x\|.$$

- En déduire que $y = 0$, puis que : $\text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N) = \{0\}$.

- Etablir enfin l'égalité suivante :

$$\mathbb{K}^N = \text{Ker}(M - I_N) \oplus \text{Im}(M - I_N).$$

c) Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^N$, justifier l'existence de vecteurs $x_1 \in \text{Ker}(M - I_N)$ et $x_2 \in \mathbb{K}^N$ tels que $x = x_1 + Mx_2 - x_2$, puis montrer qu'on a pour tout entier naturel k :

$$M^k x = x_1 + M^{k+1} x_2 - M^k x_2.$$

En déduire qu'on a $Lx = Px$ où P est la matrice de la projection sur le sous-espace $\text{Ker}(M - I_N)$ dans la direction du sous-espace $\text{Im}(M - I_N)$.

Qu'en déduit-on sur la limite L ? Que dire de plus si 1 n'est pas valeur propre de M ?

7°) Conditions nécessaires de convergence d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice quelconque appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, et que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

a) Soit λ une valeur propre de la matrice M et $x \in \mathbb{C}^N$ un vecteur propre associé.

Etablir, pour tout entier naturel k , qu'on a : $M^k x = \lambda^k x$, et en déduire que la suite (λ^k) converge.

En déduire quelles sont les valeurs possibles des valeurs propres de la matrice M .

b) On suppose que 1 est valeur propre de M et on désigne par r son ordre de multiplicité (où $r \geq 1$).

- On considère un vecteur x appartenant à $\text{Ker}(M - I_N)^2$.

Montrer que $y = Mx - x$ appartient à $\text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N)$, et que $y = 0$.

En déduire que $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^2$, puis que $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^k$ pour $k \geq 1$.

- En déduire l'égalité des sous-espaces propre et caractéristique de M associés à la valeur propre 1, autrement dit l'égalité $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^r$, puis l'égalité $\dim(\text{Ker}(M - I_N)) = r$.

8°) Conditions suffisantes de convergence d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

a) On considère un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie et on note f un endomorphisme de E dont λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité r .

- Montrer que le sous-espace caractéristique $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^r$ est stable par f .

- On note alors \tilde{f} et $\tilde{\text{Id}}_E$ les endomorphismes induits par f et Id_E sur $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^r$.

Montrer que $\tilde{f} - \lambda \tilde{\text{Id}}_E$ est nilpotent, de sorte qu'on a $\tilde{f} = \lambda \tilde{\text{Id}}_E + u$ où $u \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent.

b) Dans cette question b), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et de multiplicité r_1, r_2, \dots, r_p sont de module strictement inférieur à 1.

Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X I_N - M) = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \text{Ker}(M - \lambda_1 I_N)^{r_1} \oplus \text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}$.

- Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \text{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1} M P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & O & \dots & O \\ \hline O & \lambda_2 I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \dots & O & \lambda_p I_{r_p} + N_p \end{array} \right)$$

où $I_{r_1}, I_{r_2}, \dots, I_{r_p}$ sont les matrices identités de tailles respectives r_1, r_2, \dots, r_p ,

et N_1, N_2, \dots, N_p sont des matrices nilpotentes de tailles respectives r_1, r_2, \dots, r_p .

- En déduire dans ce cas la limite de la suite géométrique $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

c) Dans cette question c), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont :

- $\lambda_1 = 1$, de multiplicité r_1 , et on suppose de plus qu'on a l'égalité : $\dim(\text{Ker}(M - I_N)) = r_1$.
- $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, de multiplicité r_2, \dots, r_p , toutes de module strictement inférieur à 1.

Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X I_N - M) = (X - 1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \text{Ker}(M - I_N) \oplus \text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}$.

- En raisonnant comme ci-dessus, préciser dans ce cas la limite de la suite géométrique $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

d) On reprend les hypothèses et les notations de la question c) ci-dessus.

- Montrer l'inclusion : $\text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k} \subset \text{Im}(M - I_N)$ pour $2 \leq k \leq p$.

On pourra, si $x \in \text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k}$, considérer l'égalité : $(M - I_N + (1 - \lambda_k) I_N)^{r_k} x = 0$.

- En déduire l'égalité : $\text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p} = \text{Im}(M - I_N)$.

- A l'aide des résultats précédents de la question 8, retrouver alors le résultat de la question 6.c).

e) A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente, et que peut-on dire de sa limite?